

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ МЕТРОЛОГИИ

Серия “Руководство по применению СТБ ИСО/МЭК 17025”

Н. Ю. Ефремова

ОЦЕНКА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В ИЗМЕРЕНИЯХ

Практическое пособие

Минск 2003

УДК 006. 91 (083. 131)
ББК 30. 10
Е 92

Серия основана в 2003 году

Рекомендовано к изданию научно-техническим советом
Белорусского государственного института метрологии
(Протокол № 1-2003 от 21. 01. 2003 года)

Рецензенты:

**Жагора Н.А., директор Белорусского государственного института метрологии,
кандидат технических наук;
Астафьева Л. Е., заместитель директора Белорусского государственного
института метрологии.**

Ефремова Н. Ю.

**Е 92 Оценка неопределенности в измерениях: Практическое пособие/
Н. Ю. Ефремова. – Мн.: БелГИМ, 2003. – 50 с. –
(Серия “Руководство по применению СТБ ИСО/МЭК 17025”).**

ISBN 985-6726-01-8.

Представленные в пособии практические рекомендации могут быть использованы для оценивания неопределенности при калибровках эталонов и средств измерений, сертификации стандартных образцов, при межрегиональных и международных сличениях национальных эталонов и стандартных образцов, в научно-исследовательских работах.

Адресовано специалистам, которые имеют отношение к области измерений и оценке их точности: работникам метрологических институтов; калибровочных, испытательных и измерительных лабораторий; организаций и предприятий, осуществляющих метрологическую деятельность, а также студентам, аспирантам, преподавателям, инженерно-техническим и научным работникам.

**УДК 006. 91 (083. 131)
ББК 30.10**

ISBN 985-6726-01-8

© БелГИМ, 2003

Предисловие

Понятие "неопределенности" в измерениях, как определяемой в количественном отношении характеристики точности измерений, является относительно новым в истории измерений в противоположность терминам "погрешность" и "анализ погрешностей", которые уже давно используются в практике метрологии.

Не смотря на то, что в некоторых странах неопределенность в измерениях начали оценивать сравнительно давно, отсутствие международного единства в этом вопросе привело к разработке семью международными организациями: Международное бюро мер и весов (МБМВ, BIPM), Международная электротехническая комиссия (МЭК, IEC), Международная федерация клинической химии (МФКХ, IFCC), Международная организация по стандартизации (ИСО, ISO), Международный союз по чистой и прикладной химии (ИЮПАК, IUPAC), Международный союз по чистой и прикладной физике (ИЮПАП, IUPAP), Международная организация законодательной метрологии (МОЗМ, OIML) такого международного документа как "Руководство по выражению неопределенности в измерениях" (далее Руководство) [10]. Целями данного Руководства явились:

- обеспечить полную информацию о том, как составлять отчеты о неопределенностях;
- предоставить основу для международного сличения результатов измерений.

В эру глобального рынка необходимо, чтобы метод для оценки и выражения неопределенности был единым во всем мире так, чтобы измерения, проводимые в разных странах, можно было легко сличить. И именно такой универсальный метод, применимый ко всем видам измерений и различным уровням точности во многих областях измерений, начиная от магазина сопротивления до фундаментальных исследований, дает Руководство. Принципы этого Руководства предназначены для использования в широком спектре измерений, включая те, которые требуются для:

- обеспечения качества в процессе производства;
- согласованности и усиления законов и регулирующих актов;
- проведения фундаментальных и прикладных исследований в науке и технике;
- эталонов и приборов для калибровки и проведения испытаний;
- разработки, поддержания и сличения международных и национальных эталонов, включая стандартные образцы состава и свойств веществ и материалов.

Поэтому сразу после издания в 1993 году Руководство приобрело статус неформального международного стандарта, который привнес согласованность во все научные и технологические измерения и всемирное единство в оценке и выражении неопределенности в измерениях.

Многие региональные и национальные стандарты других стран, например, Европейские нормы EN 45001 по аккредитации поверочных и испытательных лабораторий, предъявляли обязательное требование - снабжать количественные результаты измерений значениями неопределенности. В свою очередь органы по аккредитации несут ответственность за обеспечение выполнения этих требований аккредитованными ими лабораториями, и, в итоге, на прямую сталкиваются с проблемой определения количественного выражения неопределенности. Однако, Руководства по выражению неопределенности, опубликованные в прошлом, содержали в большинстве случаев только "грубый" и редко гибкий и универсальный способ оценки неопределенности. Поэтому с выходом в свет Руководства многими органами по аккредитации, такими как немецкие DAR (Deutscher Akkreditungsrat) или DKD (Deutscher Kalibrierdienst), а также другими значительными метрологическими организациями, такими как EUROMET (European Collaboration on Measurement Standards) и EA (European cooperation for Accreditation) все больше и больше стал приниматься во внимание общий способ выражения неопределенности, основанный на понятиях и методах, которые опубликованы в Руководстве, тем самым признавая и узаконивая положения Руководства основополагающими и в общем обязательными в международной метрологии.

С принятием международного стандарта ИСО/МЭК 17025: 1999 [8], предъявляющим требования к компетентности испытательных и калибровочных лабораторий, требования по оценке неопределенности в аккредитованных лабораториях стали международными. Таким образом, в последнее десятилетие, "неопределенность" стала единственной, наиболее полной и, что самое главное, признанной на международном уровне характеристикой точности измерений.

С целью способствования сотрудничеству между лабораториями и органами по аккредитации, взаимного признания результатов измерений и гармонизации национальных требований и процедур с международными в Республике Беларусь с 01.01.2002 г. введен национальный стандарт СТБ ИСО/МЭК 17025 – 2002 [1], представляющий собой аутентичный текст упомянутого выше международного стандарта [8]. Однако, отечественные нормативные документы не используют понятия "неопределенность" и ориентированы на традиционный и устоявшийся подход, основанный на понятиях "погрешность" и "характеристики погрешности". Достаточно упомянуть стандарты на методы поверки, методики выполнения измерений, методы испытаний, стандарты Государственной системы обеспечения единства измерений и др. И если последние несколько лет во время подготовки Руководства на русском языке [4] в России проходили широкие дискуссии, конференции и семинары по вопросу о порядке применения в отечественной метрологии неопределенности, то в настоящий момент уже просто необходимо, так или иначе, начинать оценивать неопределенность хотя бы в тех областях метрологической деятельности, на которые распространяются требования стандарта

ИСО/МЭК 17025 [8], то есть при проведении калибровок и испытаний в аккредитованных лабораториях.

Так как Руководство является "тяжелым" документом, как по объему (100 страниц), так и по содержанию, то различные зарубежные метрологические организации и институты разработали на его основе упрощенные и ориентированные на конкретную область метрологической деятельности руководства. Органы по аккредитации, которые состоят в ЕА, гармонизировали на основе Руководства свои предписания по оценке неопределенности при калибровке и представили в качестве документа ЕА 4/02 [13]. В свою очередь Немецкая калибровочная служба (DKD) представила этот документ для своих лабораторий как DKD-3 [14, 15]. ВНИИМ им. Д. И. Менделеева (г. Санкт-Петербург) издал методические указания [3], которые помимо собственно рекомендаций по применению Руководства, содержат краткое изложение концепции неопределенности, сопоставление двух подходов к оцениванию точности на основе концепций неопределенности и погрешности измерения, а также примеры вычисления неопределенности и оценивания погрешности.

В Белорусском государственном институте метрологии на сегодняшний день уже предприняты попытки по оценке неопределенности при измерениях метрологических характеристик конкретных объектов калибровки (средств измерений, эталонов) в различных областях измерений. На основании полученного при проведении таких работ опыта, длительного изучения теоретических аспектов и зарубежного опыта в оценивании неопределенности было разработано предлагаемое вниманию практическое пособие. В его основу были положены принципы Руководства [10], а также были использованы некоторые практические рекомендации, содержащиеся в других документах [12, 13, 14, 15, 16].

Надеюсь, что в работу по изучению методов оценивания неопределенности в измерениях и по непосредственной ее оценке в различных областях измерений с большим интересом включатся метрологические и научные организации, калибровочные и испытательные лаборатории, а также учебные заведения. Это позволит выражать точность измерений в Беларуси в соответствии с международными нормами, что имеет одно из первостепенных значений при сотрудничестве с зарубежными странами, устранении технических барьеров посредством установления взаимного доверия к измерительной информации, участии в международных и региональных сличениях эталонов.

Автор выражает искреннюю благодарность директору Белорусского государственного института метрологии (БелГИМа) Н. А. Жагоре и его заместителю Л. Е. Астафьевой за предоставленную возможность изучения теоретических основ оценивания неопределенности в ряде научных международных семинаров, прохождения практической стажировки в Физико-техническом институте Германии (PTB, Physikalisch-Technischen Bundesanstalt) и издания этого пособия.

1. Область применения

1.1. Результаты измерений и решения, принимаемые на их основе, представляют собой очень важную техническую информацию, которую производят национальные метрологические институты, центры метрологии и метрологические организации, аккредитованные калибровочные и испытательные лаборатории, метрологические службы предприятий и другие организации и службы, занятые измерениями. Пригодность и качество результатов измерений в значительной степени определяется точностью, с которой эти результаты были получены. При этом очень важно, чтобы все результаты измерений, выдаваемые метрологическим институтом или калибровочной или испытательной лабораторией, снабжались единой характеристикой точности, которой на сегодняшний день в соответствии с международными требованиями [8] является неопределенность. Например, четко задокументированное установление неопределенности в количественной форме, которое будет сопровождать результаты калибровок национального метрологического института БелГИМа, поможет пользователям его услуг – калибровочным или испытательным лабораториям - установить цепь прослеживаемости к национальным эталонам Беларуси. Результаты БелГИМа, полученные с помощью национальных эталонов и снабженные неопределенностью, оцененной в соответствии с международными правилами, могут беспрепятственно сравниваться с аналогичными результатами, полученными в других национальных метрологических институтах, то есть могут проводиться взаимные сличения.

1.2. Использование простой и единой, а не многих различных методик по оцениванию неопределенности внутри отдельных метрологических организаций и служб, позволит быстрее обеспечить согласованность результатов измерений, упрощая, таким образом, их трактовку и дальнейшее правильное использование, как в рамках отдельной организации, так и вне ее пределов.

1.3. Пособие содержит последовательное изложение научных принципов, математических выкладок и правил, а также практических рекомендаций, в соответствии с которыми следует выполнять оценивание неопределенности при калибровках, испытаниях, метрологической аттестации и сертификации стандартных образцов и эталонных материалов, научно-исследовательских работах, межрегиональных и международных сличениях и любых других работах, связанных с измерениями и оценкой их точности.

1.5. Положения представлены в общей форме, чтобы распространить правила оценивания неопределенности на все области измерений. Если необходимо, представленные методы могут быть дополнены в различных областях более детальными инструкциями, чтобы информация легче могла восприниматься и применяться. При разработке такой дополнительной инструкции должны быть соблюдены основные положения, собранные в этом документе, чтобы обеспечивалась гармонизация по способу оценки точности между различными областями измерений.

2. Термины и определения

В данном разделе представлены только самые основные термины и их определения, касающиеся неопределенности в измерениях. Все они соответствуют терминам, приведенным в Руководстве [4, 10] и/или в Международном словаре основных и общих терминов по метрологии [11]. Термины, определения которых не представлены в данном разделе, но выделены курсивом при первом упоминании в тексте пособия, содержатся в [4, 9, 10, 11]. Некоторые основные термины из области теории вероятностей и математической статистики, также выделенные курсивом при первом упоминании в тексте пособия, представлены в Приложении 7.

Неопределенность (измерения) – это параметр, связанный с результатом измерений, который характеризует разброс значений, которые могли бы быть обоснованно приписаны измеряемой величине.

Из определения "неопределенности" следует, что она является количественной мерой точности соответствующего результата измерений, и выражает степень доверия, с которой может допускаться, что значение измеренной величины в условиях измерения лежит внутри определенного интервала значений. Или другими словами неопределенность является количественной мерой того, насколько надежной оценкой измеряемой величины является полученный при проведении того или иного измерения результат. Неопределенность делает возможным сравнить результаты различных измерений одинаковых измеряемых величин между собой или с эталонными значениями. А установление доверия к результатам измерений с помощью их сравнения важно в национальной торговле и международном товарообмене. Это помогает устранять торговые и экономические барьеры, устанавливать соглашения о взаимном признании результатов испытаний.

Таким образом, неопределенность измерения можно назвать мерой:

- наших знаний об измеряемой величине после измерения;
- качества измерения с точки зрения их точности;
- надежности результата измерений, в качестве оценки для значения измеряемой величины.

Стандартная неопределенность – неопределенность результата измерений, выраженная как стандартное отклонение.

Суммарная стандартная неопределенность – стандартная неопределенность результата измерений, когда результат получают из значений ряда других величин, равная положительному квадратному корню суммы членов, причем члены являются дисперсиями или ковариациями этих других величин, взвешенными в соответствии с тем, как результат измерений изменяется в зависимости от изменения этих величин.

Оценка (неопределенности) по типу А – метод оценивания неопределенности путем статистического анализа ряда наблюдений.

Оценка (неопределенности) по типу В – метод оценивания неопределенности иным способом, чем статистический анализ ряда наблюдений.

Расширенная неопределенность – величина, определяющая интервал вокруг результата измерений, в пределах которого, можно ожидать, находится большая часть распределения значений, которые с достаточным основанием могли бы быть приписаны измеряемой величине.

Коэффициент охвата – числовой коэффициент, используемый как множитель суммарной стандартной неопределенности для получения расширенной неопределенности.

Замечание:

Неопределенность относится к знаниям об измеряемой величине, имеющимися у нас после проведения измерения, а не к результату измерений, который является полностью известным. Более корректно говорить не о неопределенности измерения (либо – в измерении, либо - результата измерений), а о неопределенности знания измеряемой величины или, для краткости, неопределенности измеряемой величины. Поэтому имеющиеся в приведенных выше определениях стандартной неопределенности и суммарной стандартной неопределенности словосочетание "неопределенность результата измерений" делают их не совсем корректными, но именно в такой форме они даются в [10].

Далее в тексте будет использоваться термин либо просто "неопределенность" либо "неопределенность величины (входной, выходной, измеряемой)", либо, когда речь будет идти не о самих величинах, а об их оценках, будет использоваться термин "неопределенность, связанная с оценкой величины (входной, выходной, измеряемой)".

3. Общие положения

Обычно результат измерений является только аппроксимацией или оценкой значения измеряемой величины и, таким образом, он будет полным, только когда оцененное значение измеряемой величины сопровождается значением неопределенности. Весь процесс оценивания значения некоторой измеряемой величины и неизбежно сопровождающую ее неопределенность, можно представить в виде следующих 8-ми этапов:

- 1) Описание измерения и составление его модели;
- 2) Оценивание значений и стандартных неопределенностей входных величин;
- 3) Анализ корреляций;
- 4) Составление бюджета неопределенности;
- 5) Расчет оценки выходной величины;
- 6) Расчет стандартной неопределенности выходной величины;

- 7) Расчет расширенной неопределенности;
- 8) Представление конечного результата измерений.

Последующие разделы (пп. 4 - 11) пособия будут описывать эти этапы. Процесс оценивания неопределенности в общем виде представлен на схеме (рис. 1).

Основные формулы для главных этапов расчета неопределенности представлены в таблице Приложения 3.



Рис. 1 – Процесс оценивания неопределенности

4. Описание измерения и составление его модели

4.1. В большинстве случаев измеряемая величина Y не является прямо измеряемой, а зависит от других измеряемых величин $X_1, X_2, \dots, X_N$. Эти так называемые влияющие величины воздействуют на нее и преобразуют ее "истинное" значение в то значение, которое показывает средство измерений X_{ind} . Этот процесс представлен на рис. 2.

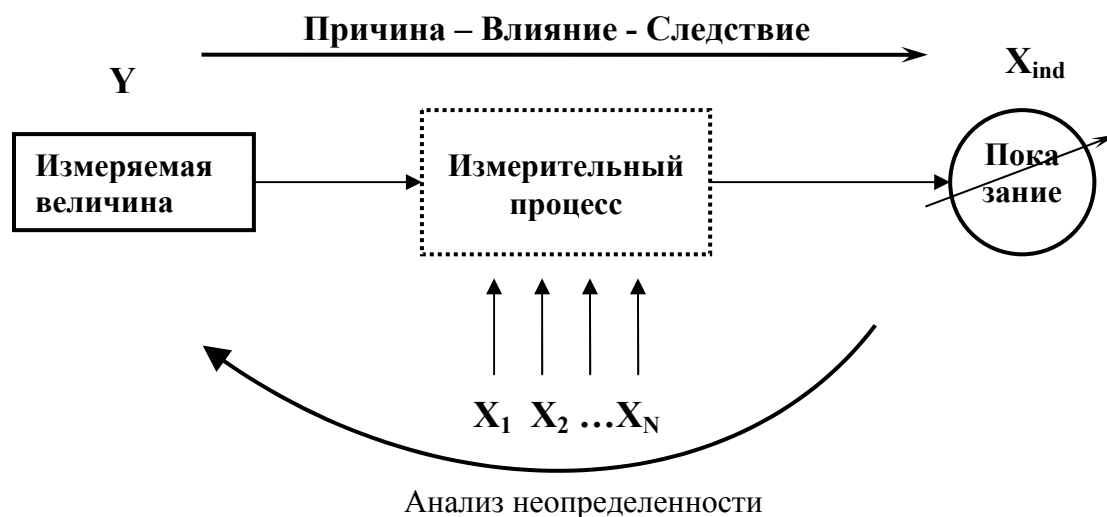


Рис. 2 – Процесс преобразования измеряемой величины в процессе измерения (для случая прямого измерения)

4.2. Если все величины, от которых зависит результат измерений, изменяются, их неопределенности можно оценить статистическими средствами. Однако так как на практике это редко представляется возможным из-за ограниченного времени и ресурсов, неопределенности обычно оценивают используя математическую модель измерения и Закон распространения неопределенности (см. п. 9.1).

Таким образом, измеряемую величину Y следует выразить через функциональную зависимость, представляющую собой в общем виде:

$$Y = f(X_{ind}, X_1, X_2, \dots, X_N) \quad (1)$$

где величины X_i ($i=1, 2, \dots, N$) называются *входными величинами*,
а величина Y называется *выходной величиной*.

Сами входные величины X_i могут в свою очередь зависеть от других величин, включая поправки и поправочные коэффициенты на систематические эффекты, что ведет к сложной функциональной зависимости, которая никогда не может быть записана точно:

$$\begin{aligned} X_1 &= g_1(w_1, w_2, \dots, w_k) \\ X_2 &= g_2(z_1, z_2, \dots, z_l) \end{aligned} \quad (2)$$

и т. д.

Выходная величина может быть выражена просто как:

$$Y = x + P_1 + P_2 + \dots + P_M \quad (3)$$

где P_i – это поправки, например, для оператора, условий окружающей среды, лаборатории и т. д.

4.3. Стадия моделирования измерения является чрезвычайно важной, так как от правильности составления модели измерения зависит количество источников

неопределенности, а, следовательно, вносимые ими вклады в суммарную неопределенность и ее величина. Однако нет четкого правила относительно того, как необходимо составлять модель измерения. Можно лишь дать некоторые рекомендации:

- основными исходными данными для составления модели являются: объект измерения, метод измерения (метод непосредственной оценки – прямое измерение, метод замещения, метод сравнения), методика измерения, схема или принцип измерения прибора;
- важно представить физический принцип измерения (вплоть до полного устройства средства измерений) и всю цепь преобразования измеряемой величины в процессе ее измерения, при этом может использоваться принцип "Причина – Влияние – Следствие" (см. рис. 2);
- функция модели f может описывать одновременно метод измерения и алгоритм оценки, если измеряемая величина определяется как расчетное значение;
- необходимо принимать во внимание особенности шкал или табло средств измерений, разрешающую способность, а также чувствительность приборов;
- математическая модель должна всегда пересматриваться, когда наблюдаемые данные показывают, что модель неадекватна;
- функцию модели можно определить экспериментально или она может существовать как алгоритм, который должен быть реализован численно или в компьютерной программе, с помощью которой проводится числовая обработка измерения, или она может быть комбинацией из всех этих форм.

4.4. Процесс моделирования может быть бесконечным, но всегда нужно находить баланс между тщательностью составления модели и необходимой точностью. Тщательность анализа всех входных величин, а также уровень, до которого математически необходимо моделировать измерение может определяться:

- требованиями заказчика;
- требованиями к точности метода измерения;
- величиной допуска на измеряемую величину Y .

4.5. Набор входных величин можно разделить на две следующие группы:

- 1) величины, чьи значения и неопределенности определяются непосредственно в текущем измерении. Эти значения и неопределенности можно получить, например, в результате одного наблюдения, повторных наблюдений или заключения, основанного на опыте, и они могут требовать определения поправок в показания прибора и поправок на влияющие величины такие, как температура окружающей среды, атмосферное давление и влажность;

- 2) величины, чьи значения и неопределенности вносятся в измерение из внешних источников, такие как величины, связанные с аттестованными эталонами, стандартными образцами или стандартными справочными данными.

4.6. Для упрощения составления математической модели измерения и выявления всех необходимых для каждой конкретной измерительной задачи входных величин в Приложении 1 представлен список некоторых источников неопределенности.

4.7. Уравнение модели должно всегда сопровождаться списком применяемых в нем символов и обозначаемых ими величин с кратким описанием или пояснением того, на каком основании эти величины были включены в модель измерения. Это можно сделать в форме, представленной в п. 2.2 Приложения 2.

5. Оценивание значений и стандартных неопределенностей входных величин

5.1. Для каждой величины, входящей в уравнение модели (1) необходимо определить *оценку* и *стандартную неопределенность*. При этом все входные величины вследствие того, что их значения не могут быть точно известны, являются *случайными непрерывными величинами*. Тогда оценками входных величин, обозначаемыми в общем виде малыми буквами ($x_1, x_2, \dots, x_N$), являются их *математические ожидания*. А *стандартными неопределенностями* $u(x_i)$ входных величин будут *стандартные отклонения* этих величин X_i .

5.2. Каждую оценку входной величины x_i и связанную с ней стандартную неопределенность $u(x_i)$ получают из *распределения вероятностей* входной величины X_i . Распределение вероятностей является представлением наших знаний о величине. А *вероятность* является количественной мерой или степенью нашей разумной уверенности в справедливости некоторого утверждения или предположения относительно того, что выдвинутая гипотеза подтверждается (эта вероятность часто называется *субъективной вероятностью*). Такой гипотезой в метрологии является утверждение относительно возможных значений измеряемой величины на основании имеющихся знаний. Например, в высказывании "наша уверенность в том, что значение измеряемой величины лежит в интервале между ***a*** и ***b*** составляет 0,5 или 50 %" гипотезой является утверждение о том, что значение измеряемой величины лежит в интервале между ***a*** и ***b*** (при этом данная гипотеза выдвигается на основании имеющейся у нас информации об измеряемой величине), а мерой нашей уверенности, что это действительно так, является вероятность, которая составляет 0,5. Далее это высказывание следует представить в математической форме в виде распределения вероятностей.

В зависимости от вида имеющихся знаний о величине (под знаниями понимается любая имеющаяся значимая информация) распределение вероятностей

может быть *распределением частот*, то есть основанным на статистических данных (например, на сериях наблюдений X_{ik} величины X_i) или оно может быть *априорным распределением*, основанным на любой не статистической информации. В обоих случаях распределения вероятностей являются описанием наших неполных знаний о величинах, и оба этих подхода являются признанными интерпретациями вероятности, как количественной меры наших знаний или утверждений относительно значений величин.

5.3. Распределения вероятностей описываются с помощью специальных функций: *функции распределения* и/или *функции плотности вероятности*. Функции плотностей также называют законами распределения случайных величин, например, закон Гаусса, прямоугольный, треугольный и т. д. (см. п. 5.7.2). В зависимости от вида закона распределения вероятностей величины получают необходимые математические ожидания и стандартные отклонения величины. Для нахождения закона распределения каждой величины X_i необходимо использовать всю имеющуюся информацию о ней, которые можно почерпнуть из результатов наблюдений, сертификатов калибровки, спецификаций или технических условий изготовителя, результатов исследовательских работ, контрольных карт качества процесса, любой справочной литературы, а также личного опыта и интуиции специалиста-метролога.

5.4. На типе имеющейся информации о величине (статистической или нестатистической) основано деление способов оценивания стандартных неопределенностей: *оценивание по типу А* и *оценивание по типу В*. Оценивание по типу А осуществляют путем статистического анализа серий наблюдений и значения стандартных неопределенностей получают из функции плотности вероятности, полученной из наблюдаемого распределения частот. При оценивании по типу В значения стандартных неопределенностей получают из априорной функции плотности вероятности, то есть предполагаемой функции плотности вероятностей, основанной на степени уверенности в том, что событие произойдет.

Стандартные неопределенности часто называют в зависимости от метода их оценивания: *стандартные неопределенности типа А* и *стандартные неопределенности типа В*.

5.5. Стандартная неопределенность, связанная с оценкой измеряемой величины, имеет такую же размерность, как и само значение оценки, т. е. выражается в тех же единицах измерений. В некоторых случаях рационально применять относительную стандартную неопределенность. Она является стандартной неопределенностью, связанной с оценкой, разделенной на модуль (абсолютное значение) оценки, и поэтому является безразмерной. Ее применение становится невозможным, когда значение оценки равно нулю (см. п. 9.6).

5.6. Оценивание (стандартной неопределенности) по типу А

5.6.1. Оценивание (стандартной неопределенности) по типу А может основываться на любых обоснованных методах статистической обработки данных, таких как:

- расчет стандартного отклонения и среднего значения на основании серии наблюдений (см. п. 5.6.2);
- использование метода наименьших квадратов для подбора кривой к данным (например, градуировочной кривой) и для получения соответствующих оценок параметров аппроксимации и их стандартных отклонений [4, 10, 12];
- проведение дисперсионного анализа для идентификации и определения значений отдельных случайных эффектов в измерениях, чтобы эти эффекты могли быть правильно приняты во внимание при оценивании неопределенности [4, 10, 12];
- и т. п.

Если ситуация является достаточно сложной, необходимо получить консультацию у эксперта по статистике.

5.6.2 В качестве примера оценивания по типу А можно рассмотреть величину Q , для которой были получены n независимых наблюдений в одинаковых условиях измерения.

В этом случае оценкой величины Q будет *среднее арифметическое значение* или *среднее* $\bar{q}$ из n наблюдений q_k ($k = 1, 2, \dots, n$):

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k \quad (4)$$

Стандартная неопределенность, связанная с оценкой $\bar{q}$, является *экспериментальным стандартным отклонением среднего значения* и равна положительному квадратному корню из *экспериментальной дисперсии среднего значения*:

$$u(\bar{q}) = s(\bar{q}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2} \quad (5)$$

При этом *экспериментальная дисперсия* наблюдений $s^2(q_k) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2$ оценивает дисперсию распределения вероятностей, которое в данном случае является распределением частот, лежащим в основе наблюдений.

Примечание: Если число n повторных наблюдений небольшое ($n < 10$), то должна приниматься во внимание надежность значения стандартной неопределенности, которая

рассчитана по методу А. Если число n наблюдений не может быть увеличено, то должны приниматься в расчет другие описанные далее методы оценки стандартной неопределенности (см. п. 9.3 и Приложение 3).

5.6.3. Если для измерения, проводимого по хорошо определенному методу измерения, который находится под статистическим контролем, имеется *комбинированная или совместная оценка дисперсии* s_p^2 , которая характеризует измерение, то она при известных условиях будет лучше оценивать дисперсию распределения вероятностей, лежащего в основе наблюдений, чем экспериментальная дисперсия, оцененная из малого числа наблюдений. В этом случае стандартное отклонение среднего значения оценивается как:

$$s(\bar{q}) = \frac{s_p}{\sqrt{n}} \quad (6)$$

5.7. Оценивание (стандартной неопределенности) по типу В

5.7.1. Оценивание (стандартной неопределенности) по типу В основывается на базе научного суждения, основанного на всей доступной информации о возможной изменчивости X_i . Фонд информации может включать:

- данные предварительных измерений;
- данные, полученные в результате опыта, или общие знания о поведении и свойствах соответствующих материалов и приборов;
- спецификация изготовителя;
- данные, которые приводятся в свидетельствах о калибровке и в других сертификатах;
- неопределенности, приписываемые справочным данным, взятым из справочников.

Правильное использование фонда доступной информации для оценивания стандартной неопределенности по типу В требует интуиции, основанной на опыте и общих знаниях, и является мастерством, которое приходит с практикой и опытом.

5.7.2. Имеющуюся информацию о величинах X_i необходимо правильно описать с помощью функции распределения вероятностей, чтобы затем определить оценки величин и их стандартные отклонения. При этом используются следующие основные распределения:

- 1) прямоугольное (равномерное);
- 2) треугольное;
- 3) трапецеидальное;
- 4) U – образное (арксинуса);
- 5) нормальное (Гаусса).

Формы этих распределений, формулы для нахождения стандартных неопределенностей, соответствующих этим распределениям, а также случаи их применения представлены в Приложении 4.

5.7.3. Приведем некоторые комментарии и примеры по использованию того или иного закона распределения, а также по оценке необходимых параметров распределений в зависимости от имеющейся информации о входной величине:

- Применение прямоугольного распределения является разумным по умолчанию при отсутствии любой другой информации. Но если известно, что значения рассматриваемой величины более вероятны у центра, чем у границ интервала, будет лучшим вариантом использование треугольного или нормального распределения, чем прямоугольного;

- Если данная неопределенность дается как кратное стандартного отклонения, то стандартную неопределенность можно получить делением данной неопределенности на множитель;

- Если данная неопределенность определяет интервал, имеющий уровень доверия 95 или 99 %, то, если не указано другого, предполагают, что использовалось нормальное распределение для вычисления данной неопределенности, и стандартную неопределенность получают делением данной неопределенности на соответствующий коэффициент охвата (1,96 или 2,58) для нормального распределения;

- Если можно предположить, что распределение величины X_i – нормальное и вероятность того, что она находится в интервале от a_- до a_+ составляет 50 %, то в качестве наилучшей оценки величины X_i можно принять среднюю точку этого интервала. Далее, если полуширина этого интервала обозначается как $a = (a_- - a_+)/2$, то можно принять $u(x_i) = 1,48a$, так как для нормального распределения с ожиданием μ и стандартным отклонением σ интервал $\mu \pm \sigma/1,48$ охватывает примерно 50 % распределения;

- Для случая, подобного описанному выше, но где, основываясь на имеющейся информации, можно утверждать, что "есть приблизительно 2 из 3 шансов, что значение величины X_i находится в интервале от a_- до a_+ " (другими словами вероятность того, что величина X_i находится в этом интервале, составляет 67 %), стандартная неопределенность будет равна $u(x_i) = a$, где $a = (a_- - a_+)/2$, так как для нормального распределения с ожиданием μ и стандартным отклонением σ интервал $\mu \pm \sigma$ охватывает примерно 68,3 % распределения;

- В случаях, когда можно оценить только границы (верхний и нижний предел) для величины X_i и утверждать, что вероятность того, что значение величины X_i находится в интервале от a_- до a_+ для всех практических целей, равна единице, а вероятность того, что X_i находится за пределами этого интервала равна "нулю", и если нет конкретных сведений о возможных значениях величины X_i внутри интервала, то можно только предположить, что величина X_i с одинаковой вероятностью

может находиться в любой точке этого интервала. В данной ситуации принимается равномерное или прямоугольное распределение вероятностей для величины X_i . Тогда математическое ожидание величины X_i является средней точкой интервала, $x_i = (a_- + a_+)/2$, а стандартная неопределенность $u(x_i) = a/\sqrt{3}$, где $a = (a_- - a_+)/2$.

5.7.4. Так как надежность оценок составляющих неопределенности зависит от качества доступной информации, рекомендуется, чтобы все параметры, от которых зависит измеряемая величина, были изменяемыми до степени необходимой на практике, чтобы оценки, насколько это возможно, были основаны на наблюдаемых данных. Всякий раз, когда это возможно, использование эмпирических моделей измерений, основанных на долговременных количественных данных, эталонов сравнения и контрольных карт, которые могут показать, находится ли измерение под статистическим контролем, должно составлять часть усилий, которые необходимо затратить для получения надежных оценок неопределенности. Хорошо спланированный эксперимент может значительно способствовать повышению надежности оценок неопределенности и является частью искусства проведения измерения. Более простыми словами это можно выразить так: не следует придумывать несуществующую информацию о величине, лучше получить ее из "живого" эксперимента (если это, конечно, возможно).

5.8. Следует признать, что оценка неопределенности по типу В может быть такой же надежной, как и оценка по типу А, особенно в ситуации, когда оценивание по типу А основывается на небольшом числе статистически независимых наблюдений (см. Примечание к п. 5.6.2).

5.9. Некоторые или все P_i (см. уравнение (3)) на основании имеющейся информации могут оцениваться значением "нуль", но они могут иметь достаточно большие стандартные неопределенности, чтобы внести значительный вклад в суммарную стандартную неопределенность, и которые должны обязательно оцениваться.

5.10. При проведении анализа имеющейся информации о входных величинах и последующей оценки распределений их вероятностей, а также математических ожиданий и стандартных отклонений, представленных в этом разделе, целесообразно составлять список, каждый пункт которого посвящен входной величине в уравнении модели. В каждом пункте такого списка должна содержаться примерно следующая информация: интервал значений для величины, оценка значения величины, вид распределения, тип оценивания неопределенности, значение стандартной неопределенности, а также краткое описание того, откуда и на основании каких предположений и предпосылок получены вышеперечисленные данные, или указание источников получения вышеперечисленных данных (справочник, свидетельство о калибровке, технические условия, паспорт на средство измерений и т. д.). Примерная форма такого списка представлена в п. 3 Приложения 2.

При оценивании неопределенности по типу А необходимо также привести список результатов наблюдений, непосредственно считанных с прибора, и расчет их статистических характеристик: среднее арифметическое значение, стандартное отклонение результатов наблюдений, стандартная неопределенность (см. п. 4 Приложения 2).

6. Анализ корреляций

6.1. Две входные величины могут быть независимы или связаны между собой, то есть взаимозависимы или *коррелированы*. В концепции неопределенности имеется в виду корреляция "логическая", а не математическая. На сколько эффект корреляции должен приниматься в расчет, зависит от соответствующего измерения, от знаний о методе измерения и от проведенной оценки взаимных зависимостей входных величин.

Может существовать значительная корреляция между двумя входными величинами, если при их определении используют один и тот же измерительный прибор, физический эталон измерения или справочные данные, имеющие значительную стандартную неопределенность. Например, если поправка на температуру, необходимая для оценки одной входной величины X_i , получается с помощью некоторого термометра и такая же поправка на температуру, необходимая для оценки входной величины X_j , тоже получается с помощью этого же термометра, то две входные величины могут быть значительно коррелированы.

В общем, необходимо обратить внимание на то, что пренебрежение корреляциями между входными величинами может привести к ошибочной оценке стандартной неопределенности выходной величины. Иногда корреляции могут исключаться с помощью подходящего выбора функции модели.

6.2. Мерой взаимной зависимости или корреляции двух случайных величин является *ковариация* [9]. Ковариация, связанная с оценками двух входных величин X_i и X_j может устанавливаться равной нулю или рассматриваться как пренебрежимо малая, если

а) обе входные величины X_i и X_j являются независимыми друг от друга, например, если они в различных, независимых один от другого экспериментах многократно, но не одновременно наблюдались или если они представляют (описывают) результирующую величину различных, независимых друг от друга проведенных исследований или если

б) одна из входных величин X_i и X_j может рассматриваться как константа или если

в) исходя из наших знаний и предположений просто не имеется никаких оснований для корреляции между входными величинами X_i и X_j .

6.3. Если две входные величины X_i и X_j являются коррелированными в определенной степени, то есть они являются зависимыми друг от друга тем или иным

способом, то при оценивании суммарной стандартной неопределенности (см. п. 9) среди вкладов неопределенностей входных величин должна учитываться их ковариация, которая оценивается по следующей формуле:

$$u(x_i, x_j) = u(x_i)u(x_j)r(x_i, x_j) \quad (i \neq j) \quad (7)$$

Степень корреляции определяется с помощью коэффициента корреляции $r(x_i, x_j)$, ($i \neq j$ и $|r| \leq 1$)

6.4. В случае n пар независимых повторных наблюдений двух величин P и Q ковариация их средних арифметических значений $\bar{p}$ и $\bar{q}$ оценивается по формуле:

$$u(\bar{p}, \bar{q}) = s(\bar{p}, \bar{q}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})(p_k - \bar{p}) \quad (8)$$

Оцененный коэффициент корреляции для P и Q получают из уравнения (7):

$$r(p, q) = \frac{s(\bar{p}, \bar{q})}{s(\bar{p})s(\bar{q})} \quad (9)$$

7. Бюджет неопределенности

7.1. Бюджет неопределенности служит для обобщения и наглядного представления всей полученной и проанализированной ранее (п. 4 – 6) информации в количественной форме о входных величинах с целью облегчения непосредственного расчета значения стандартной неопределенности выходной величиной. Бюджет неопределенности может также использоваться для анализа вкладов от каждого источника неопределенности в суммарную неопределенность с целью определения точности измерительного процесса, корректировки модели измерения или поиска способов уменьшения влияния некоторых источников неопределенности.

7.2. Бюджет неопределенности представляет собой таблицу, в которой содержится как минимум следующая информация:

- список всех источников неопределенности, то есть входных величин с принятыми в модели обозначениями (п.4);
- полученные по п. 5 значения оценок входных величин x_i и связанные с ними стандартные неопределенности $u(x_i)$;
- коэффициенты чувствительности c_i (см. п. 9);
- вклады неопределенности каждой входной величины $u_i(y)$ (см. п.9).

Для занесенных в таблицу числовых значений должны указываться единицы измерений соответствующих величин.

7.3. В таблице могут также содержаться другие необходимые данные, такие как: тип оценивания неопределенности, вид распределения, диапазон значений

величины, процентный вклад от каждого источника неопределенности в суммарную неопределенность и т. п.

7.4. Пример такой таблицы для бюджета неопределенности представлен в п. 7 Приложения 2.

7.5. После составления бюджета неопределенности можно рассчитать оценку выходной величины y в соответствии с п. 8 и связанную с ней стандартную неопределенность $u(y)$ в соответствии с п. 9.

8. Расчет оценки выходной величины

8.1. Оценка выходной величины Y , обозначаемая y , является результатом измерения величины, значение которой необходимо установить при проведении измерения. Эту оценку получают из уравнения (1), заменяя входные величины X_i их оценками x_i .

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (10)$$

При этом предполагается, что значения входных величин являются в прямом смысле лучшими оценками входных величин, что они были откорректированы (были внесены поправки) на влияния и эффекты, значимые для данной модели. Если это не так, то необходимые поправки должны вводиться в модель в качестве отдельных входных величин.

Замечание: Следует отличать результаты наблюдений, которые непосредственно считывают с табло средств измерений, от результата измерений, который получают в результате расчета по п. 8.1.

8.2. Если функция модели f является суммой или разностью входных величин X_i :

$$f(X_1, X_2, \dots, X_N) = \sum_{i=1}^N p_i X_i \quad (11)$$

где множители p_i для каждой входной величины X_i являются положительными или отрицательными числами, то оценка выходной величины в соответствии с равенством (10) также дает в результате соответствующую сумму или разницу оценок входных величин:

$$y = \sum_{i=1}^N p_i x_i \quad (12)$$

8.3. Если функция модели f является произведением или отношением входных величин X_i :

$$f(X_1, X_2, \dots, X_N) = c \prod_{i=1}^N X_i^{p_i} \quad (13)$$

где степени p_i для каждой входной величины X_i , а также общий множитель c являются положительными или отрицательными числами, то оценка выходной величины в свою очередь является соответствующим произведением или отношением оценок входных величин:

$$y = c \prod_{i=1}^N x_i^{p_i} \quad (14)$$

9. Расчет стандартной неопределенности выходной величины

9.1. Как было сказано в п. 3 результат измерений является полным, только если полученное в соответствии с п. 8 значение оценки измеряемой величины Y сопровождается значением неопределенности. А главной целью всех проведенных ранее в пп. 4 – 7 действий, которые можно кратко назвать анализом неопределенности, является подготовка к расчету стандартной неопределенности выходной величины, описанная в данном пункте.

Стандартная неопределенность выходной величины Y , обозначаемая $u(y)$, представляет собой стандартное отклонение оценки выходной величины или результата измерений и характеризует разброс значений, которые могут быть с достаточным основанием приписаны измеряемой величине Y . Стандартная неопределенность выходной величины Y получается путем суммирования стандартных неопределенностей входных величин $u(x_i)$ (и их ковариаций в зависимости от обстоятельств), оцененных то типу А (см. п. 5.6) или по типу В (см. п. 5.7), используя обычный метод суммирования или объединения стандартных отклонений. Поэтому стандартная неопределенность выходной величины Y является *суммарной или комбинированной стандартной неопределенностью*, обозначаемой $u_c(y)$.

Применяемый для суммирования стандартных неопределенностей метод в терминах концепции неопределенности по [10] называется *Законом распространения неопределенностей*, а в просторечии "корень из суммы квадратов".

9.2. Суммарная стандартная неопределенность вычисляется следующим образом:

1) В случае некоррелированных входных величин:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)} \quad (15)$$

2) В случае коррелированных входных величин:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)} \quad (16)$$

где $u(x_i, x_j)$ определяется по формуле (7) п. 6.3.

Уравнения (15) и (16) базируются на аппроксимации функции модели $Y = f(X_{ind}, X_1, X_2, \dots, X_N)$ рядом Тейлора первого порядка. Это справедливо только для линейных функций. При значительной нелинейности функции f в ряд Тейлора нужно включать члены более высокого порядка в выражение для $u_c(y)$ (уравнения (15) или (16)). Но более правильным и осмысленным решением в этом случае будет "расчет" распределения измеряемой величины, из которого затем рассчитывается математическое ожидание и стандартная неопределенность. В настоящее время для такого расчета используется *Метод Монте-Карло* [6].

9.3. Частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ в уравнениях (15) и (16) называются *коэффициентами чувствительности* c_i . Коэффициенты чувствительности показывают, как выходная оценка y изменяется с изменением значений входных оценок $x_1, x_2, \dots, x_N$. Строго говоря, частные производные представляют собой $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i}$, оцененные на математических ожиданиях X_i . Однако на практике частные производные оцениваются как:

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{x_1, x_2, \dots, x_N} \quad (17)$$

Коэффициенты чувствительности c_i вместо того, чтобы рассчитываться из функции f , иногда определяются экспериментальным путем с помощью измерения изменения в Y , вызванного изменением в выбранном X_i , поддерживая при этом остальные входные величины неизменными. В этом случае знание функции f (или части ее, когда таким образом определяются только некоторые коэффициенты чувствительности) сводится к эмпирическому разложению в ряд Тейлора первого порядка, основанному на измеренных коэффициентах чувствительности.

9.4. С учетом формулы (17) формулы (15) и (16) преобразуются в следующие выражения:

1) В случае некоррелированных входных величин:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^N u_i^2(y)} \quad (18)$$

2) В случае коррелированных входных величин:

$$\begin{aligned} u_c(y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j)} = \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^N u_i^2(y) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N u_i(y) u_j(y) r(x_i, x_j)} \end{aligned} \quad (19)$$

где $r(x_i, x_j)$ определяется из формулы (7) или (9) п. 6.3,

$u_i(y)$ ($i=1, 2, \dots, N$) является вкладом в стандартную неопределенность, связанную с оценкой y выходной величины, который получается из стандартной неопределенности, связанной с оценкой входной величины x_i , по следующей формуле [13]:

$$u_i(y) = c_i u(x_i) \quad (20)$$

9.5. В то время как стандартная неопределенность $u(x_i)$ всегда положительна, вклад неопределенности $u_i(y)$ в соответствии с равенством (20) в зависимости от знака коэффициента чувствительности может принимать положительное или отрицательное значение. В случае некоррелированных величин этот знак не играет роли, так как в соответствии с формулой (18) при расчете суммарной стандартной неопределенности вклады неопределенности $u(x_i)$ возводятся в квадрат. В случае коррелированных входных величин $u(x_i)$ знак обязательно должен приниматься во внимание. Так для суммы или разности двух коррелированных величин ($Y = X_1 \pm X_2$), суммарная стандартная неопределенность в соответствии с (19) будет соответственно равна:

$$u^2(y) = u^2(x_1) + u^2(x_2) \pm 2u(x_1)u(x_2)r(x_1, x_2) \quad (21)$$

9.6. Если функция модели f является суммой или разностью некоррелированных входных величин X_i (см. п. 8.2), то коэффициенты чувствительности, равные множителям p_i , и равенство (18) приводят к:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N p_i^2 u^2(x_i)} \quad (22)$$

Если функция модели f является произведением или отношением некоррелированных входных величин X_i (см. п. 8.3), то в этом случае уравнение (18) можно представить в виде:

$$\frac{u_c(y)}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left[\frac{p_i u(x_i)}{x_i} \right]^2} \quad (23)$$

Это уравнение имеет такой же вид как и уравнение (18), но с суммарной стандартной неопределенностью, выраженной как относительная суммарная стандартная неопределенность $u_c(y)/|y|$ ($|y| \neq 0$) и стандартными неопределенностями входных величин $u(x_i)$, выраженных как относительные стандартные неопределенности $u(x_i)/|x_i|$ ($|x_i| \neq 0$), см. также п. 5.5.

10. Расчет расширенной неопределенности

10.1. Хотя суммарная стандартная неопределенность повсеместно используется для выражения неопределенности, а также по предложению Международного комитета бюро мер и весов МКМВ при представлении результатов всех международных сличений или других работ под эгидой МКМВ и Консультативных Комитетов, в некоторых случаях в торговле, промышленности и регулирующих актах, а также когда дело касается здоровья и безопасности, часто необходимо дать меру неопределенности, которая указывает интервал для результата измерений, в пределах которого, можно ожидать, находится большая часть распределения значений, которые можно с достаточным основанием приписать измеряемой величине. Такой дополнительной мерой неопределенности является *расширенная неопределенность*, обозначаемая U .

10.2. Расширенную неопределенность U получают путем умножения стандартной неопределенности выходной величины $u(y)$ на *коэффициент охвата* k :

$$U = ku(y) \quad (24)$$

10.3. В случае указания расширенной неопределенности результат измерений выражается в виде интервала $Y = y \pm U$, который можно также записать в виде $(y - U \leq Y \leq y + U)$. Данная запись означает, что наилучшей оценкой значения, приписываемого измеряемой величине Y , является y , и что интервал от $y - U$ до $y + U$ содержит, можно ожидать большую часть распределения значений, которые можно с достаточным основанием приписать величине Y .

Следует обратить внимание на то, что в концепции неопределенности слово "доверие" не используется для модификации слова "интервал", когда ссылаются на интервал, определяемый U , и термин "доверительный уровень" также не используется в связи с интервалом, так как эти термины имеют в статистике специальные определения и применяются к интервалу, когда выполнены определенные условия. Поэтому более корректно U рассматривается как задание интервала вокруг результата измерений, который содержит большую часть p распределения вероятностей, характеризуемого оценкой измеряемой величины и ее стандартной неопределенностью. При этом p является *вероятностью охвата* или *уровнем доверия* этого интервала.

10.4. Следует признать, что умножение суммарной стандартной неопределенности на какую-то величину не дает никакой новой информации, а просто представляет ее в новом виде, так как вся имеющаяся информация об измеряемой величине представлена с помощью параметра функции распределения вероятностей, которым является стандартная неопределенность.

10.5. Значение коэффициента охвата k выбирается на основе уровня доверия p , требуемого интервалом от $y - U$ до $y + U$, и для этого необходимо полное знание о распределении вероятностей значений выходной величины, характеризуемого

оценкой выходной величины и ее стандартной неопределенностью. И хотя эти параметры обладают большой значимостью, без знания закона распределения вероятностей выходной величины их недостаточно, чтобы установить интервалы, имеющие точно известные уровни доверия. Поэтому для "назначения" распределения вероятностей значений измеряемой величины, характеризуемого оценкой измеряемой величины и ее стандартной неопределенностью, в концепции неопределенности используются положения *Центральной Предельной теоремы* [10]. В соответствии с этой теоремой в случаях, когда:

1) оценки измеряемой величины Y получают из оценок x_i значительного числа ($N \geq 3$) входных величин, которые описываются "хорошо ведущими себя" распределениями, такими как нормальное и прямоугольное;

2) стандартные неопределенности $u(x_i)$ этих оценок дают сопоставимые вклады в суммарную неопределенность $u_c(y)$, связанную с оценкой выходной величины y

можно допустить, что распределение вероятностей выходной величины нормальное.

Следовательно, в таких случаях, при которых измеряемой величине может приписываться нормальное распределение вероятностей, для расчета расширенной неопределенности $U_p = k_p u_c(y)$, которая обеспечивает уровень доверия p , можно использовать для k_p значения из нормального закона распределения (см. таблицу 1).

Для использования таких значений, необходимо также, чтобы оценки неопределенностей входных величин были достаточно надежными. Так как, например, при оценивании стандартной неопределенности по типу А из малого числа ($n < 10$) повторных результатов наблюдений неопределенность такой оценки ("неопределенность неопределенности") может достигать 50 % при $n = 3$.

Таблица 1 – Значения коэффициента охвата k_p , который создает интервал, имеющий уровень доверия p при допущении нормального распределения

Уровень доверия p , %	Коэффициент охвата, k_p
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

Часто на практике принимают $k = 2$ для интервала, имеющего уровень доверия 95 % и $k = 3$ для интервала, имеющего уровень доверия 99 %.

10.6. Если одно из названных условий (нормальное распределение или достаточная надежность) не выполнено, то для указанных коэффициентов получается расширенная неопределенность, которая соответствует вероятности покрытия меньшей, чем приведенная. В этих случаях должны применяться другие методы, чтобы установить, что значение расширенной неопределенности соответствует примерно такой же вероятности покрытия как в нормальном случае, описанным в п. 10.5. При этом можно выделить следующие ситуации:

1) Когда распределение вероятностей выходной величины является прямоугольным. Это может быть в случае, когда вклад источника неопределенности входной величины, имеющей прямоугольное распределение, в суммарную стандартную неопределенность, является доминирующим, то есть значение такого вклада больше, чем суммарная стандартная неопределенность всех остальных входных величин (в три раза и более). В этом случае для $p = 95 \%$ $k_p = 1,65$, а для $p = 99 \%$ $k_p = 1,71$. Примером такой ситуации является калибровка показывающих цифровых приборов с низкой разрешающей способностью при условии, что конечная разрешающая способность - единственный доминирующий источник в бюджете неопределенности.

2) Когда распределение вероятностей результата измерения описывается распределением Стьюдента (t -распределением) с эффективной степенью свободы ν_{eff} . Это происходит в случае, когда стандартная неопределенность входной величины обладает не достаточной надежностью. Критерий надежности в общем полностью выполняется, если все стандартные неопределенности, оцененные по типу А, определялись на основании ряда повторных наблюдений, количество которых более 10. Такой метод определения k_p с помощью эффективных степеней свободы ν_{eff} представлен в Приложении 3.

10.7. В остальных случаях, то есть во всех случаях, в которых принятие нормального распределения хорошо не обосновано и не применимы методы, описанные в п. 10.6, необходимо добывать информацию о действительном распределении вероятностей значений выходной величины, и из него определять значение коэффициента охвата, который соответствует необходимой вероятности охвата.

11. Представление конечного результата измерений

11.1. При составлении отчета о неопределенности следует иметь в виду, что количество информации, необходимое для документирования результата измерений, зависит от предполагаемого использования последнего.

11.2. При движении вверх по иерархии измерений от технических до прецизионных (включая коммерческую и регулирующую деятельность на рынке, инженерную работу в промышленности, промышленные и академические исследования и разработки, калибровочные и поверочные услуги низкого уровня, рабочие эталоны и калибровочные лаборатории, национальные лаборатории эталонов)

требуется приводить все больше подробностей о том, как была получена оценка измеряемой (выходной) величины и связанная с ней неопределенность. На любом уровне этой иерархии в отчет о неопределенности необходимо включать всю информацию, необходимую для того, чтобы ее мог понять любой другой специалист-метролог, чтобы, если это потребуется, можно было повторно оценить качество измерений в будущем или его можно было бы улучшить, если появится новая информация или новые данные. При этом всегда лучше дать слишком много информации, чем слишком мало [7].

11.3. При подробном описании того, как был получен полный результат измерения, который состоит из оценки и неопределенности (стандартной и расширенной) измеряемой величины, можно воспользоваться формой протокола, приведенной в Приложении 2.

11.4. Однако развернутый отчет о неопределенности не должен составляться при каждом измерении. Действительно, технические измерения, проводимые в огромном количестве каждый день в промышленности и торговле, не сопровождаются какими-либо развернутыми отчетами о неопределенности. Это допускается потому, что большинство из этих измерений проводится с помощью приборов, подвергаемых периодической калибровке или узаконенной поверке, в спецификациях и нормативных документах на которые содержатся необходимые сведения о неопределенностях. Поэтому развернутый отчет об оценивании неопределенности необходимо составлять для каждой определенной методики измерения (испытаний, калибровки). При этом он может содержаться в соответствующем нормативном документе на методику измерения или его можно поместить в руководство по качеству лаборатории или в другой документ вместе с описанием методики выполнения измерения. Кроме того, почти каждая методика измерения и ее модель в рамках отдельных видов измерений имеют одинаковые "части". Такие "части" должны входить в существующие модели и отчеты о неопределенности одинаковым способом или могут просто даваться ссылки на документы, в которых уже дано их представление.

11.5. При записи численного полного результата измерений, состоящего из оценки и неопределенности измеряемой величины, рекомендуется применять следующие приведенные ниже способы. В качестве примера рассмотрим эти способы записи для эталона массы m_s с номинальным значением массы 100 г. Слова в скобках можно опустить для краткости, если u_c определяется где-либо еще в документе, сообщающем результат измерений.

11.5.1. Если мерой неопределенности является суммарная стандартная неопределенность $u_c(y)$:

1) " **$m_s = 100,02147$ г (с суммарной стандартной неопределенностью) $u_c = 0,35$ мг**" [4, 10]

или " **$m_s = 100,02147$ г; 0,35 мг**";

или " $m_s = 100,02147 \text{ г}; 3,5 \cdot 10^{-6}$ ", где число после ";" без указания единиц величин является относительной стандартной неопределенностью $u_c(y)/|y|$;

2) " $m_s = 100,02147(35) \text{ г}$ ", где цифры в скобках являются численным значением (суммарной стандартной неопределенности) u_c , соответствующие последним цифрам приведенного результата" [4, 10];

3) " $m_s = 100,02147(0,00035) \text{ г}$ ", где число в скобках является численным значением (суммарной стандартной неопределенности) u_c , выраженной в единицах величин результата измерения" [4, 10];

или " $m_s = 100,02147 \text{ г} (0,35 \text{ мг})$ ", где число в скобках является численным значением суммарной стандартной неопределенности $u_c(y)$, выраженной в указанных единицах величин;

или " $m_s = 100,02147 \text{ г} (3,5 \cdot 10^{-6})$ ", где число в скобках без указания единиц величин является относительной стандартной неопределенностью $u_c(y)/|y|$;

4) " $m_s = (100,02147 \pm 0,00035) \text{ г}$ ", где число, следующее за знаком $\pm$, является численным значением (стандартной суммарной неопределенности) u_c , а не доверительным интервалом" [4, 10];

или " $m_s = 100,02147 \text{ г} (1 \pm 3,5 \cdot 10^{-6})$ ", где число в скобках без указания единиц величин является оценкой измеряемой величины и стандартной неопределенностью в относительной форме.

Последней формы (4) следует избегать, поскольку традиционно она использовалась для указания интервала, соответствующего высокому уровню доверия, и, следовательно, может быть спутана с расширенной неопределенностью, хотя скобки, применяемые при этой форме записи, используются с целью предотвращения такой путаницы.

11.5.2. Если мерой неопределенности является расширенная неопределенность U , то лучше всего указать результат в виде $y \pm U$. При этом наиболее полной будет следующая форма записи:

" $m_s = 100,02147 \pm 0,00079 \text{ г}$ ", где число следующее за знаком $\pm$, является численным значением расширенной неопределенности $U = k u_c(y)$, причем U определено из (суммарной стандартной неопределенности) $u_c = 0,35 \text{ мг}$ и (коэффициента охвата) $k = 2,26$, основанного на t – распределении для $\nu = 9$ степеней свободы и определяет интервал, оцененный как имеющий уровень доверия 95 процентов" [4, 10],

а более кратко: " $100,02147 \text{ г} \pm 0,00079 \text{ г} (k_p = 2)$ "

или " $100,02147 \text{ г} \pm 0,79 \text{ мг} (k_p = 2)$ ", где в скобках указано значение коэффициента охвата.

11.6. Указание неопределенности в свидетельстве о калибровке в соответствии с [13, 14] может быть представлено в следующей форме.

В свидетельстве о калибровке должен быть указан полный результат измерений, состоящий из оценки y измеряемой величины и связанной с нею расширен-

ной неопределенности U в форме $y \pm U$. При этом рекомендуется использовать фразу следующего содержания:

"Указанная расширенная неопределенность является произведением стандартной неопределенности и коэффициента охвата $k = 2$, и при нормальном распределении соответствует вероятности охвата приблизительно равной 95 %. Стандартная неопределенность была определена в соответствии с требованиями документа EAL – R2".

В случаях, где имеет смысл нахождение степеней свободы, эта фраза должна звучать следующим образом:

"Указанная расширенная неопределенность является произведением стандартной неопределенности измерения и коэффициента охвата $k = XX$, и соответствует при t -распределении с $\nu_{eff} = YY$ эффективными степенями свободы вероятности охвата приблизительно равной 95%. Стандартная неопределенность была определена в соответствии с требованиями документа EAL – R2".

11.7. Численные значения оценки y и стандартной неопределенности $u_c(y)$ или расширенной неопределенности U не следует давать с избыточным числом цифр. Обычно достаточно привести их с двумя значащими цифрами, хотя в некоторых случаях может быть необходимо сохранить дополнительные цифры для того, чтобы избежать погрешности округления в следующих расчетах.

При сообщении окончательных результатов иногда может быть уместным округлить неопределенности в сторону увеличения, а не до ближайшей цифры. Например, $u_c(y) = 10,47$ мОм можно округлить до 11 мОм. Однако здравый смысл должен возобладать, и такое значение как $u_c(y) = 28,05$ кГц следует округлить до 28 кГц.

Выходные и входные оценки должны округляться так, чтобы соответствовать связанным с ними неопределенностям; например, если $y = 10,05762$ Ом с $u_c(y) = 27$ мОм, то y следует округлить до 10,058. Коэффициенты корреляции должны даваться с точностью до третьей цифры, если их абсолютные значения близки к единице [4, 7, 10].

12. Заключительные положения

12.1. В таблице Приложения 5 для облегчения проведения расчета неопределенности представлены основные формулы для основных этапов расчета неопределенности, описанных в пп.4 – 11.

12.2. В [13, 14] существует такой термин как *наилучшие измерительные возможности* (НИВ) (всегда относятся к определенной величине, измеряемой величине). НИВ определяются как наименьшая неопределенность, которую лаборатория может достигнуть в пределах своей области аккредитации при проведении более или менее обычных (повседневных, постоянных) калибровок:

- почти идеальных измерительных эталонов, предназначенных для определения, воспроизведения, хранения или воспроизведения единицы соответствующей величины или одной или более ее значений;
- почти идеальных измерительных инструментов, предназначенных для измерения такой величины.

Оценка наилучших измерительных возможностей аккредитованных калибровочных лабораторий должна основываться на методе, описанном в этом документе, но должна обычно подтверждаться экспериментально. Некоторые рекомендации по оценке НИВ даны в Приложении 5.

12.3. В Приложении 8 рассмотрены два примера по расчету неопределенности при калибровке гири (п. 1 Приложения 8) и при измерении значения тока (п. 2 Приложения 8). При этом в п. 2 Приложения 8 рассмотрены два варианта расчета неопределенности для одной и той же измерительной задачи, что подтверждает тот факт, что оценка неопределенности не является ни рутинной, ни чисто математической работой, она зависит от детального знания природы измеряемой величины и измерения.

12.4. Следует отметить, что хотя многие документы по оценке неопределенности [3, 4, 10, 13, 14, 16], как и это пособие, дают схему оценивания неопределенности, они не могут заменить критическое мышление, интеллектуальную честность и профессиональное мастерство, необходимые при анализе и оценивании неопределенности. А качество и ценность полученной неопределенности измеряемой величины в конечном счете зависит от понимания, критического анализа и честности тех, кто участвует в приписывании ее значения.

Приложение 1

Источники неопределенностей

1. Метод измерения:

- число наблюдений;
- длительность измерения;
- выбор методики измерения;
- выбор эталона или средства измерений;
- выбор подходящего фильтра, стандартного образца и т. д.

2. Измерительное оборудование:

- неопределенность калибровки;
- вариация показаний;
- время, прошедшее с момента последней калибровки;
- применяемое программное обеспечение;
- порог чувствительности или конечная разрешающая способность;
- температура и т. д.

3. Окружающая среда:

- температура;
- влажность;
- давление;
- чистота помещения;
- магнитные и гравитационные поля;
- вибрация;
- различные излучения, свет и т. д.

4. Измеряемый объект:

- температура;
- поверхность;
- материал;
- размеры;
- отклонение формы для геометрических измерений и т. д.

5. Оператор:

- измерительное усилие;
- опыт работы;
- выбор средства измерения;
- образование;
- параллакс;
- добросовестность;
- манипулирование (ловкость рук) и т. д.

Приложение 2

Отчет о неопределенности (измеряемой величины)

1. Измерительная задача: дать краткое описание того, как определяется измеряемая величина Y , включая:

- метод и/или методика измерения;
- схема или план измерения;
- используемое оборудование;
- условия измерения.

2. Модель измерения:

2.1. Выразить математически зависимость между выходной величиной Y и входными величинами X_i , от которых она зависит: $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$. Функция f должна содержать каждую величину, включая все поправки и поправочные множители, которые могут внести значительные составляющие в неопределенность измеряемой величины.

2.2. Перечислить все входные величины с указанием применяемых условных обозначений и единиц измерений, в которых они будут оцениваться, в виде следующей таблицы:

Величина	Единица измерений	Определение или описание

3. Анализ входных величин:

Входная величина: _____	Тип оценивания неопределенности: _____ Вид распределения: _____ Значение оценки: _____ Интервал, в котором находится значение входной величины : _____ Стандартная неопределенность: _____
Краткое описание того, откуда и на основании каких предположений и предпосылок получены вышеперечисленные данные, или указание источников получения вышеперечисленных данных (справочник, свидетельство о калибровке, технические условия, паспорт на средство измерений и т. п.)	

4. Результаты наблюдений: список результатов наблюдений, непосредственно считанных с прибора и определение их статистических характеристик:

- среднее арифметическое значение,
- среднее квадратическое отклонение (стандартное отклонение),
- стандартная неопределенность.

5. Корреляции: проанализировать входные величины на предмет их корреляции и рассчитать коэффициенты корреляции для всех коррелированных входных величин с указанием методов их расчета.

6. Коэффициенты чувствительности: получить коэффициенты чувствительности для каждой входной величины или на основании расчета частных производных $\partial f / \partial x_i$ или экспериментально с указанием метода получения.

7. Бюджет неопределенности:

Величина X_i	Единица измерений	Значение оценки x_i	Интервал +/- r	Тип неопределенности	Распределение вероятностей	Стандартная неопределенность $u(x_i)$	Степени свободы ν	Коэффициент чувствительности c_i	Вклад неопределенности $u_i(y)$	Процентный вклад, %
X_1		x_1				$u(x_1)$		c_1	$u_1(y)$	
...		...				...		...	...	
X_n		x_n				$u(x_n)$		c_n	$u_n(y)$	
Y		y				$u(y)$				

8. Расширенная неопределенность: определить коэффициент охвата на основе выбранного уровня доверия и рассчитать расширенную неопределенность

9. Полный результат измерений: представить полный результат измерений, состоящий из оценки y измеряемой величины Y и расширенной неопределенности U в форме $Y = y \pm U$ с указанием единиц измерений для Y и y .

Приложение 3

Расчет коэффициентов охвата из эффективных степеней свободы (в соответствии с [13, 14])

1. Установление коэффициента охвата k , который соответствует определенной вероятности охвата, требует чтобы принималась во внимание надежность суммарной стандартной неопределенности $u_c(y)$, которая связана с оценкой y выходной величины. Это означает, что рассматривается, как хорошо стандартное отклонение, связанное с результатом измерений, оценивается через $u_c(y)$. При оценке стандартного отклонения нормального распределения мерой надежности являются степени свободы оценок, которые зависят от объема соответствующей выборки. Подходящей мерой для надежности стандартной неопределенности, связанной с оценкой выходной величины, аналогично являются эффективные степени свободы ν_{eff} . Поскольку положения Центральной предельной теоремы теории вероятности выполняются, эффективные степени свободы, относящиеся к результату измерений, в хорошем приближении выражаются через комбинацию эффективных степеней свободы различных вкладов неопределенности $u_i(y)$.

2. Если условия для применения Центральной предельной теоремы налично, то метод для расчета коэффициента охвата k включает в себя три следующих шага:

1) Оценка стандартной неопределенности, связанной с оценкой выходной величины, в соответствии с разделом 6.

2) Оценка эффективных степеней свободы ν_{eff} для стандартной неопределенности $u_c(y)$, с помощью формулы Велча-Саттерсвейта:

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \quad (3.1)$$

где $u_i(y)$ ($i=1,2,\dots,N$) – вклады в стандартную неопределенность, которая соответствует оценке y выходной величины

ν_i - эффективные степени свободы вклада неопределенности $u_i(y)$.

Для значения стандартной неопределенности $u(\bar{q})$, которое определяется по методу оценивания (неопределенности) типа А, степени свободы получаются как $\nu_i = n - 1$. Установление степеней свободы, которые соответствуют значению стандартной неопределенности, определенной по методу оценивания (неопределенности) типа В, требует напротив в каждом случае подробного рассмотрения. При этом необходимо принимать во внимание, что обычно определение областей изменчивости проводят так, чтобы избежать недооценки. Если, например, устанавливаются верхняя и нижняя границы a_- и a_+ , то они обычно выбираются так,

что вероятность того, что соответствующая величина лежит за пределами этих границ, очень мала. В условиях этого предположения степени свободы для стандартной неопределенности, значение которой определено по методу оценивания типа В, могут приниматься $\nu_i \rightarrow \infty$.

3) Определение коэффициента охвата k из таблицы В.1. Эта таблица базируется на t -распределении (распределении Стьюдента), которое установлено для вероятности охвата 95,45 % и 99,73 %. Если ν_{eff} является не целым числом, что обычно и происходит, то ν_{eff} уменьшают до ближайшего целого числа.

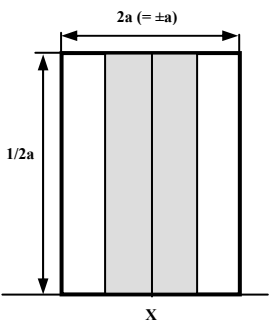
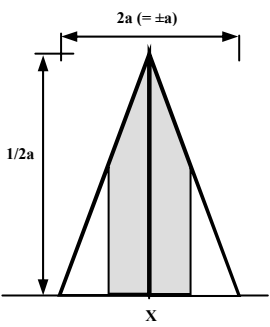
Таблица 1 – Коэффициенты покрытия k для различных степеней свободы ν_{eff}

ν_{eff}	1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	50	∞
k_{95}	13,97	4,53	3,31	2,87	2,65	2,52	2,43	2,37	2,28	2,13	2,05	2,00
k_{99}	235,8	19,21	9,22	6,22	5,51	4,90	4,53	4,28	3,96	3,42	3,16	3,00

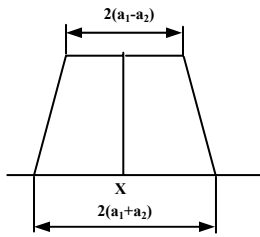
Приложение 4

Функции распределения вероятностей

Следующая таблица показывает, как рассчитать стандартную неопределенность, зная вид распределения значений величины, а также позволяет правильно его выбрать в зависимости от имеющейся информации о величине [5, 12].

Вид функции плотности вероятности	Используется когда	Стандартная неопределенность
Прямоугольное распределение		
	◆ Об измеряемой величине только известно, что ее значение наверняка лежит в определенной области и что каждое значение между границами этой области с одинаковой вероятностью может приниматься в расчет; ◆ Сертификат или другой документ дает пределы без определения уровня доверия (например, 25 мл ± 0,05 мл); ◆ Оценка получена в форме максимальных значений диапазона (± a) с неизвестной формой распределения.	$u(x) = \frac{a}{\sqrt{3}}$
Треугольное распределение		
	◆ Доступная информация относительно значений величины менее ограничена, чем для прямоугольного распределения. Значения возле среднего значения более вероятны, чем у границ; ◆ Оценка получена в форме максимальных значений диапазона (± a), описанного симметричным распределением вероятностей; ◆ Когда величина является суммой или разностью двух величин, распределение вероятностей значений которых являются прямоугольными с одинаковыми диапазонами.	$u(x) = \frac{a}{\sqrt{6}}$

Трапецеидальное распределение

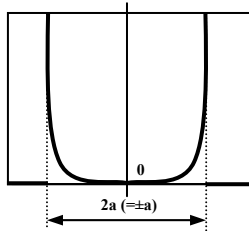


- ♦ Значения возле границ менее вероятны, чем те, которые находятся возле центра (математического ожидания);
- ♦ Когда величина является суммой или разностью двух величин, распределение вероятностей значений которых являются прямоугольными с разными диапазонами ($\pm a_1$ и $\pm a_2$).

$$u(x) = \frac{a_1 + a_2}{\sqrt{6}} \sqrt{(1 + \beta^2)}$$

$$\beta = \frac{|a_1 - a_2|}{a_1 + a_2}$$

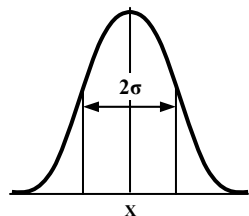
U – образное распределение (арксинусоидальное распределение)



- ♦ Когда величина X изменяется по закону синуса $X = a \cdot \sin \phi$, где значения угла ϕ распределены равномерно в интервале от $-\pi$ до $+\pi$.

$$u(x) = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Нормальное распределение



- ♦ Оценка получена из повторных наблюдений случайно изменяющегося процесса;
- ♦ Неопределенность дана в форме:
 - стандартного отклонения наблюдений s ,
 - относительного стандартного отклонения $s / \bar{x}$,
 - коэффициента дисперсии CV% без установления вида распределения
- ♦ Неопределенность дается в форме 95%-ого или другого интервала доверия Q без указания вида распределения

$$u(x) = s$$

$$u(x) = s$$

$$u(x) = x(s / \bar{x})$$

$$u(x) = \frac{CV\%}{100} x$$

$$u(x) = Q/2 \text{ (для } Q \text{ при } 95\%)$$

Приложение 5 - Алгоритм поэтапного расчета неопределенности

Этап	Формулы для расчета	
1 Составление модели измерения	$Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$, где X_i – входная величина	
2 Определение оценки измеряемой величины	$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, где x_i – входная оценка для величины X_i	
3 Оценивание стандартной неопределенности	Тип А: $\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k$ $s^2(q_k) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2$ $s^2(\bar{q}) = \frac{s^2(q_k)}{n}$ $u(x_i) = u(\bar{q}) = s(\bar{q})$ где q_k – наблюдения величины X_i	Тип В: $x_i = \frac{1}{2} (a_+ + a_-)$ для норм. распределения: $u(x_i) = 1,48a$ ($p = 50\%$) $u(x_i) = a$ ($p = 68,3\%$) для прямоугольного распределения: $u^2(x_i) = \frac{a^2}{3}$ для треугольного распределения: $u^2(x_i) = \frac{a^2}{6}$
4 Оценивание суммарной стандартной неопределенности	Для независимых величин: $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N u_i^2(y), \quad u_i(y) = c_i u(x_i);$ $c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} \bigg _{x_1, x_2, \dots, x_N}$	Для коррелированных величин: $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j)$
5 Определение расширенной неопределенности	$U = k \cdot u_c(y)$ где k – коэффициент охвата, $k_p = t_p(v_{eff})$; $v_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i}}$ - формула Велча - Саттерсвейта для оценивания по типу А: $v = n - 1$; для оценивания по типу В: $v = \infty$ Приблизительный подход: $k = 2$ ($p = 95\%$); $k = 3$ ($p = 99\%$)	

Приложение 6

Комментарии по оценке наилучших измерительных возможностей (в соответствии с [13, 14])

1. Наилучшие измерительные возможности (см. п. 12.2) это один из параметров, который используется, чтобы охарактеризовать область аккредитованной калибровочной лаборатории, другими такими (параметрами) являются измеряемая физическая величина, метод калибровки или тип прибора, который должен калиброваться, и диапазон измерения. Наилучшие измерительные возможности обычно устанавливаются в области аккредитации или в других документах, которые подтверждают решение об аккредитации или сертификат аккредитации и которые в большинстве случаев используются как признак аккредитации. Иногда это устанавливается как в области аккредитации, так и в подтверждающих документах. Наилучшие измерительные возможности являются одной из существенных частей информации, которая может быть найдена в реестрах аккредитованных лабораторий, которые регулярно публикуются Органами по аккредитации и используются потенциальными клиентами аккредитованных лабораторий, чтобы оценить возможность проводить определенную калибровку в данной лаборатории или нет.

2. Чтобы сделать возможным сравнение возможностей различных калибровочных лабораторий, в частности лабораторий, аккредитованных различными органами по аккредитации, установление наилучших измерительных возможностей нуждается в гармонизации. Чтобы содействовать этому, ниже даны некоторые разъяснения для термина "наилучшие измерительные возможности", основанные на его определении, который дан выше в основном тексте (п. 12.2).

3. Под "более или менее повседневными калибровками" имеется в виду, что лаборатория будет способной достичь установленные (заявленные) возможности в рамках своей нормальной работы, которую она выполняет в условиях своей аккредитации. Очевидно, бывают исключения, когда лаборатория могла бы быть способной достичь большего на основании обширных исследований и дополнительных мероприятий, но эти случаи не охватываются определением наилучших измерительных возможностей, если только это не заявленная политика лаборатории, чтобы проводить такие научные исследования (в таком случае это становится "более или менее повседневными" типами калибровок лаборатории).

4. Добавление уточнения "почти идеальный" в определении означает, что наилучшие измерительные возможности не должны зависеть от характеристик калибруемого прибора. Понятие "почти идеальный", таким образом, описывает случай, когда никакие существенные вклады неопределенности не должны объясняться физическими эффектами, которые могут быть приписаны возможным несовершенствам калибруемого прибора. Однако само собой понятно, что "почти идеальный" прибор должен иметься в распоряжении. Если можно доказать, что в определенном случае сам "идеальный" имеющийся прибор не соответствует этой

концепции, то при оценке наилучших измерительных возможностей вклад неопределенности из-за прибора должен быть включен. В таком случае указывается, что наилучшие измерительные возможности относятся к калибровке такого определенного типа приборов.

5. Определение наилучших измерительных возможностей содержит в себе то, что лаборатория в рамках своей аккредитации не имеет права указывать неопределенность при своих повседневных калибровках меньшую, чем наилучшие измерительные возможности. Это означает, что она должна указывать большую неопределенность, когда установлено, что действительный (фактический) процесс калибровки вносит существенный вклад в неопределенность. Обычно при этом значительный вклад составляет калибруемый прибор. Очевидно, что неопределенность, указываемая каждый раз в свидетельстве о калибровке, никогда не может быть меньше наилучших измерительных возможностей. При указании соответствующих неопределенностей от лабораторий требуется, чтобы они использовали основные положения этого документа.

6. Следует указать на то, что понятие наилучшие измерительные возможности должно приниматься во внимание только при таких результатах, которые лаборатория выдает, как аккредитованная лаборатория. Собственно говоря, понятие наилучшие измерительные возможности является административным (управленческо-техническим) термином и от него не требуется безусловно отражать реальные технические возможности лаборатории. Может быть возможным для лаборатории применять для аккредитации большую неопределенность, чем ее наилучшие измерительные возможности, если лаборатория имеет для этого свои внутренние причины. Такие внутренние причины обычно включают случаи, когда реальные возможности должны поддерживаться в конфиденциальности для внешних клиентов. Например, при научно-исследовательских работах или когда осуществляются услуги для особых клиентов. Политикой Органа по аккредитации должно быть то, что аккредитация предоставляется на каждую заявленную область, если лаборатория может проводить калибровки в соответствующей области. (Это утверждение относится не только к наилучшим измерительным возможностям, но и ко всем параметрам, которые устанавливают область деятельности лаборатории).

7. Установление наилучших измерительных возможностей является задачей Органа по аккредитации. Исключая случаи, изложенные в предыдущем подразделе, определение наилучших измерительных возможностей следует осуществлять на основании методов, установленных в этом документе. Наилучшие измерительные возможности указываются таким же способом, как и соответствующая неопределенность в свидетельстве о калибровке, то есть в форме расширенной неопределенности, обычно с коэффициентом охвата $k = 2$. (Только в некоторых случаях, при которых нормальное распределение не может приниматься или установление

(оценивание) основывается на ограниченном числе данных, наилучшие измерительные возможности устанавливаются принимая вероятность охвата примерно 95 %. (см. п. 10 основного текста).

8. Все компоненты, которые имеют существенные вклады в неопределенность, должны приниматься во внимание при оценке наилучших измерительных возможностей. Для определения вкладов, о которых известно, что они подвержены временным изменениям или изменяются в зависимости от других физических величин, могут устанавливаться границы возможных изменений, в которых предполагается, что они (изменения) будут происходить при нормальных условиях работы. Например, если известно, что характеристика применяемого исходного эталона подвержена дрейфу, то при определении вкладов неопределенности, возникающих от исходного эталона, должен учитываться вклад, который вызван дрейфом между двумя периодическими (следующими друг за другом) калибровками.

9. В некоторых областях неопределенность может зависеть от дополнительных параметров, как, например, частота приложенного напряжения при калибровка эталонных сопротивлений. Должен указываться дополнительный параметр такого рода вместе с измеряемой величиной и наилучшими измерительными возможностями, обозначенными в отдельности (специфицированными) для дополнительного параметра. Часто бывает, что наилучшие измерительные возможности указываются как функция соответствующих (упомянутых) параметров.

10. Наилучшие измерительные возможности обычно указываются в численном виде. Поскольку они являются функцией измеряемой величины, к которой они относятся, или других параметров, их можно указывать также в аналитической форме. В последнем случае наглядной такую зависимость может сделать дополнительная диаграмма. Должно быть всегда четко видно, указываются ли наилучшие измерительные возможности как абсолютное или относительное значение. (Обычно указание соответствующих единиц дает необходимое пояснение, при величинах с размерностью 1 тем не менее всегда необходимо отдельное пояснение).

11. Хотя установление должно проводиться методами, приведенными в этом документе, основной текст содержит ясное требование, что назначение должно поддерживаться или подтверждаться экспериментальными доказательствами. Это требование означает, что Орган по аккредитации не должен ограничиваться (довольствоваться) только расчетом неопределенности. При проведении надзора или по поручению (требованию) должны проводиться многочисленные сличения, которые "подкрепляют" расчеты.

Приложение 7

Основные термины из области вероятности и математической статистики

Основные термины и их определения, приведенные в этом Приложении, взяты из Международного стандарта ИСО 3534 – 1 [9] и его издания, действующего на территории Республики Беларусь в качестве национального стандарта СТБ ГОСТ Р 50779.10 – 2001 (ИСО 3534.1 - 93) [2]. Этими же документами [2, 9] следует пользоваться для определения других математических терминов, не включенных в данное Приложение, но присутствующих в тексте.

1. Основные термины, используемые в теории вероятностей

Вероятность – действительное число в интервале от 0 до 1, приписываемое случайному событию.

Примечание – Его можно отнести к долговременной относительной частоте события или к степени уверенности, что событие произойдет. При высокой степени уверенности, вероятность близка к 1.

Случайная величина – величина, которая может принимать любое значение из указанного ряда величин и с которой связано распределение вероятностей.

Примечания:

1 Случайная величина, которая может принимать только отдельные значения, называется "дискретной". Случайная величина, которая может принимать любое значение в пределах конечного или бесконечного интервала, называется "непрерывной".

2 Вероятность события A обозначается $Pr(A)$ или $P(A)$.

Распределение вероятностей (случайной величины) – функция, определяющая вероятность того, что случайная величина принимает любое заданное значение или принадлежит к заданному ряду значений.

Примечание – Вероятность всего ряда значений случайной переменной равна 1.

Функция распределения – функция, определяющая для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X меньше или равна x :

$$F(x) = Pr(X \leq x)$$

Функция плотности вероятности (для непрерывной случайной переменной) – производная (если она существует) функции распределения:

$$f(x) = dF(x)/dx$$

Примечание - $f(x)dx$ это "элемент вероятности": $f(x) = Pr(x < X < x + dx)$

Корреляция – связь между двумя или несколькими случайными величинами в пределах распределения двух или более случайных величин.

Примечание – Большинство статистических мер корреляции оценивают только степень линейной связи.

Ожидание (случайной величины или распределения вероятности); математическое ожидание; среднее (значение) –

1 Для дискретной случайной величины X , принимающей значения x_i с вероятностью p_i , ожидание, если оно существует, составляет

$$\mu = E(X) = \sum p_i x_i$$

причем суммирование происходит по всем значениям x_i , которые может принимать X .

2 Для непрерывной случайной величины X , имеющей функцию плотности вероятностей $f(x)$, ожидание, если оно существует, составляет

$$\mu = E(X) = \int x f(x) dx$$

причем интегрирование происходит по всему интервалу (интервалам) изменения X .

Центрированная случайная величина – случайная величина, математическое ожидание которой равно нулю.

Примечание – Если случайная величина X имеет математическое ожидание, равное μ , соответствующая центрированная случайная величина будет $(X - \mu)$.

Дисперсия (случайной величины или распределения вероятности) – математическое ожидание квадрата центрированной случайной величины

$$\sigma^2 = V(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$$

Стандартное отклонение (случайной величины или распределения вероятностей) - положительный квадратный корень из дисперсии

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Центральный момент порядка q – при одномерном распределении ожидаемое значение q -ой степени центрированной случайной величины $(X - \mu)$ составляет

$$E[(X - \mu)^q]$$

Примечание – Центральный момент второго порядка представляет собой дисперсию случайной величины X .

2. Основные термины, используемые в области статистики

Частота – число случаев данного типа событий или число наблюдений, попадающих в определенную группу.

Распределение частот – эмпирическое соотношение между значениями характеристики и их частотами или относительными частотами.

Примечание – Распределение может быть представлено графически в виде гистограммы, столбиковой диаграммы, графика накопленной частоты, или таблицы с двумя входами.

Среднее арифметическое (значение) – сумма значений, деленная на их число.

Примечания:

1 Термин "среднее" обычно применяется, когда речь идет о параметре совокупности, а термин "среднее арифметическое" – когда речь идет о результате вычисления по данным, полученных в выборке.

2 Среднее арифметическое простой случайной выборки, взятой из совокупности, представляет собой несмещенную оценку среднего этой совокупности. Однако иногда применяются и другие оценки, такие как среднее геометрическое или гармоническое, медиана или мода.

Дисперсия – мера рассеяния, которая представляет собой сумму возведенных в квадрат отклонений наблюдаемых значений от их среднего значения, деленную на число, на единицу меньшее, чем число наблюдений.

Пример – Для n наблюдений $x_1, x_2, \dots, x_n$ со средним значением

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$$

дисперсия составляет

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

Примечания:

1 Дисперсия выборки представляет собой несмещенную оценку дисперсии совокупности.

2 Дисперсия представляет собой центральный момент второго порядка, умноженный на $n/(n-1)$.

Стандартное отклонение – положительный квадратный корень из дисперсии.

Примечание – Стандартное отклонение выборки представляет собой смещенную оценку стандартного отклонения совокупности.

Центральный момент порядка q – в распределении одномерной характеристики среднее арифметическое значение разности в q -ой степени между наблюдаемыми значениями и их средним значением $\bar{x}$:

$$\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^q ,$$

где n число наблюдений.

Примечание – Центральный момент первого порядка равен нулю.

Статистика – функция выборки случайных переменных.

Примечание – Статистика, как функция случайных величин, также является случайной величиной и в качестве таковой принимает различные значения от выборки к выборке. Значение статистики, полученное путем использования наблюдаемых величин в этой функции, может быть использовано при статистической проверке или в качестве параметра совокупности, такого как среднее значение или стандартное отклонение.

Оценивание – операция приписывания, на основании наблюдений в выборке, числовых значений параметрам распределения, выбранного в качестве статистической модели совокупности, из которой взята эта выборка.

Примечание – Результат этой операции может быть выражен как единственное значение (точечная оценка) или как интервальная оценка.

Оценка – статистика, используемая для оценивания параметра совокупности.

Значение оценки – значение для оценки, полученное в результате оценивания.

Доверительная вероятность; уровень доверия – значение $(1 - \alpha)$ вероятности, связанное с доверительным интервалом или статистическим интервалом охвата.

Примечание - $(1 - \alpha)$ часто выражается в процентах.

Статистический интервал охвата – интервал, для которого можно с заданным уровнем доверия констатировать, что он включает, по крайней мере, заданную часть совокупности.

Примечания:

1 Если обе границы определяются статистиками, интервал является двусторонним. Если одна из двух границ не является конечной или представляет собой граничное значение случайной величины, интервал является односторонним.

2 Его называют также "статистически допустимый интервал". Такой термин не следует использовать, так как это может вызвать путаницу с "допустимым интервалом".

Степени свободы – обычно число членов в сумме минус число ограничений на члены суммы.

Приложение 8 - Примеры по оцениванию неопределенности

1. Калибровка гири с номинальным значением массы 10 кг [13, 15]

Измерительная задача: Определить действительное значение массы гири с номинальным значением 10 кг

Метод измерения: Сравнение с эталонной гирей, используя компаратор массы

Математическая модель измерения: $m_X = m_S + \delta m_D + \delta m + \delta m_C + \delta B$

Наблюдения: Разница масс между калибруемой (А) и эталонной (В) гирями определяется методом замещения по схеме АВВА:

$$\Delta m = \frac{m_{x2} + m_{x3}}{2} - \frac{m_{N1} + m_{N2}}{2}; \text{ было проведено три наблюдения:}$$

№	действительное значение массы гири	показание, г	наблюдаемая разница, г
1	образцовой (m_{N1})	+0,010	
	калибруемой (m_{x2})	+0,020	
	калибруемой (m_{x3})	+0,025	
	образцовой (m_{N4})	+0,015	+0,01
2	образцовой (m_{N1})	+0,025	
	калибруемой (m_{x2})	+0,050	
	калибруемой (m_{x3})	+0,055	
	образцовой (m_{N4})	+0,020	+0,03
3	образцовой (m_{N1})	+0,025	
	калибруемой (m_{x2})	+0,045	
	калибруемой (m_{x3})	+0,040	
	образцовой (m_{N4})	+0,020	+0,02

Среднее арифметическое значение наблюдений:

$$\overline{\delta m} = 0,020 \text{ г}$$

Суммарная оценка стандартного отклонения (из предварительных исследований):

$$s_p(\delta m) = 25 \text{ мГ}$$

Стандартная неопределенность:

$$u(\delta m) = s(\overline{\delta m}) = \frac{25 \text{ мГ}}{\sqrt{3}} = 14,4 \text{ мГ}$$

Бюджет неопределенности (m_X):

Входная величина X_i	Значение оценки x_i , г	+/- г, мГ	Тип неопределенности	Распределение вероятностей	Стандартная неопределенность $u(x_i)$, мГ	Коэффициент чувствительности c_i	Вклад неопределенности $u_i(y)$, мГ	Процентный вклад, %
Масса образцовой гири (m_s)	10 000,005	45 ($k=2$)	В	нормальн.	22,5	1,0	22,5	59,1
Изменение (дрейф) массы образцовой гири со времени последней калибровки (δm_D)	0,000	15	В	прямоугольн.	8,66	1,0	8,66	8,8
Наблюдаемая разница между неизвестной массой и массой эталона (δm)	0,020		А	нормальн.	14,4	1,0	14,4	24,3
Поправка на эксцентриситет нагрузки и магнитные эффекты (δm_C)	0,000	10	В	прямоугольн.	5,77	1,0	5,77	3,9
Поправка для силы выталкивания воздуха (δB)	0,000	10	В	прямоугольн.	5,77	1,0	5,77	3,9
Масса калибруемой меры (m_X)	10 000,025				29,3			

Расширенная неопределенность

$$U = k \cdot u(m_X) = 2 \cdot 29,3 = 58,6 \text{ (мГ)}$$

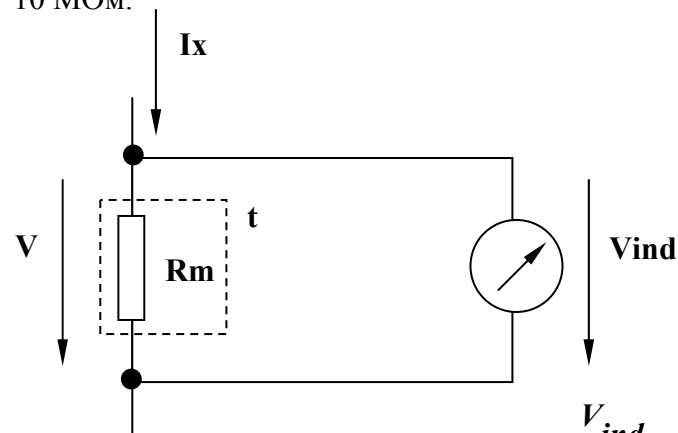
Результат: Оцененное действительное значение массы гири с номинальной массой 10 кг составляет

$$10,000025 \pm 0,000059 \text{ кг } (k = 2, p = 95 \%)$$

2. Определение значения тока [17]

Измерительная задача: Определить действительное значение тока (I_x), примерная величина которого равна 10 А

Метод измерения: Косвенное измерение тока с помощью прямого измерения падения напряжения на резисторе с номинальным значением 0,01 Ом. Для измерения напряжения используется 4 ½ разрядный цифровой вольтметр с величиной входного сопротивления более, чем 10 МОм.



Математическая модель:
$$I_x = \frac{V_{ind}}{T_{ind} \cdot R_{mo} \cdot (1 + \alpha \cdot \delta t)}$$
 (вариант 1)

Наблюдения: Было получено 12 наблюдений напряжения

№	Наблюдение, мВ
1	100,13
2	99,98
3	99,94
4	100,09
5	100,2
6	99,93
7	99,98
8	99,90
9	100,06
10	100,15
11	100,06
12	99,94

Среднее арифметическое значение наблюдений:

$$\bar{V}_{ind} = 100,03 \text{ мВ}$$

Стандартное отклонение наблюдений:

$$s(V_{ind}) = 0,0985 \text{ мВ}$$

Стандартная неопределенность:

$$u(\bar{V}_{ind}) = s(\bar{V}_{ind}) = \frac{0,0985}{\sqrt{12}} = 0,0284 \text{ мВ}$$

Бюджет неопределенности (вариант 1):

Величина X_i	Значение оценки x_i	+/- r	Тип неопределенности	Распределение вероятностей	Стандартная неопределенность $u(x_i)$	Коэффициент чувствительности c_i	Вклад неопределенности $u_i(y)$, А	Процентный вклад, %
Показываемое напряжение (V_{ind}), мВ	100,03		A	нормальное	0,02840	0,0998	0,00284	32,8
Коэффициент трансформации прибора (T_{ind})	1	0,00045	B	прямоугольное	0,00026	-9,9850	-0,00259	27,5
Сопротивление резистора при температуре 23 °C (R_{mo}), мОм	10,018	0,00601 (k=2)	B	нормальное	0,00301	-0,9967	-0,00300	36,6
Коэффициент температурного расширения резистора (α), 1/К	0,00005							
Отклонение действительной температуры от нормальной 23 °C (δt), °C	0	3	B	прямоугольное	1,73205	-0,0005	-0,00086	3,1
Определяемое значение тока (I_x), А	9,98503				0,00495			

Расширенная неопределенность:

$$U = k \cdot u(I_x) = 2 \cdot 0,00495 = 0,00990 \text{ (А)}$$

Результат: Оцененное действительное значение тока составляет $9,99 \pm 0,01 \text{ А}$ ($k = 2, p = 95 \%$)

Математическая модель (вариант 2): $I_x = \frac{V}{R_{Meff}} - \delta I_x$; $V = V_{ind} - \Delta V_{ind} - \delta V_{ind} + \delta V_{ind0}$; $R_{Meff} = \frac{R_M}{(1+r)}$; $R_M = R_{M0} \cdot (1 + \alpha \cdot \delta t)$

Бюджет неопределенности (вариант 2):

Величина X_i	Значение оценки x_i	+/- г	Тип неопределенности	Распределение вероятностей	Стандартная неопределенность $u(x_i)$	Коэффициент чувствительности c_i	Вклад неопределенности $u_i(y)$, А	Процентный вклад, %	Коэффициент чувствительности c_i'	Вклад неопределенности $u_i(y)'$, А
Показываемое напряжение (V_{ind}), мВ	100,03		A	норм.	0,02840	0,0998	0,00283	32,6	1	0,02840
Погрешность показаний вольтметра (ΔV_{ind}), мВ	0	0,045	B	прямоуг.	0,02598	-0,0998	-0,00259	27,2	1	0,02598
Погрешность из-за конечного считывания показаний с цифрового вольтметра (δV_{ind}), мВ	0	0,005	B	прямоуг.	0,00289	-0,0998	-0,00029	0,3	1	0,00289
Погрешность из-за конечного считывания показаний с цифрового вольтметра при коротком замыкании входных клем (δV_{ind0}), мВ	0	0,005	B	прямоуг.	0,00289	-0,0998	-0,00029	0,3	1	0,00289
Напряжение на резисторе (V), мВ	100,03				0,03871				0,0998	0,00386
Сопротивление резистора при температуре 23 °C (R_{m0}), МОм	10,018	0,00601 (k=2)	B	норм.	0,00301	-0,9967	-0,00300	36,3	1	0,00301
Коэффициент температурного расширения резистора (α), 1/К	0,00005									
Отклонение действительной температуры резистора от нормальной 23 °C (δt), °C	0	3	B	прямоуг.	1,73205	-0,0005	-0,00086	3	0,00050	0,00087
Отклонение сопротивления резистора при отличии температуры от нормальной 23 °C (R_m), МОм	10,018				0,00313				1,0000	0,00313
Отношение сопротивления резистора к входному сопротивлению измерительного прибора (r)	0	$2,5 \cdot 10^{-10}$	B	прямоуг.	$1,44 \cdot 10^{-9}$	9,9850	$1,44 \cdot 10^{-9}$	0	-10,0179	$-1,45 \cdot 10^{-9}$
Сопротивление резистора, преобразующее ток в напряжение, которое показывает вольтметр (R_{Meff}), МОм	10,018				0,00313				-0,9967	-0,00312
Ток утечки, который не воспринимается прибором (δI_x), А	-0,0005	0,0005	B	прямоуг.	0,00029	-1,0000	-0,00029	0,3	-1,0000	-0,00029
Определяемое значение тока (I_x), А	9,98550				0,00497					0,00497

Расширенная неопределенность:

$$U = k \cdot u(I_x) = 2 \cdot 0,00497 = 0,00994 \text{ (A)}$$

Результат: Оцененное действительное значение тока составляет $9,99 \pm 0,01 \text{ А}$ ($k = 2, p = 95 \%$)

Литература

1. СТБ ИСО/МЭК 17025 – 2001 Общие требования к компетентности испытательных и калибровочных лабораторий
2. СТБ ГОСТ Р 50779.10 – 2001 (ИСО 3534.1 – 93) Статистические методы. Вероятность и основы статистики. Термины и определения
3. МИ 2552-99. Рекомендация. ГСИ. Применение "Руководства по выражению неопределенности измерений". – ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, С.-Петербург, 1999.
4. Руководство по выражению неопределенности измерения: Перевод с англ. под науч. ред. проф. Слаева В.А. – ГП ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, С.-Петербург, 1999.
5. Количественное описание неопределенности в аналитических измерениях. Перевод документа EURACHEM. – СПб: Кримас+, 1997.
6. Тезисы докладов международного семинара "Математическая и компьютерная поддержка качества измерений" (г. Санкт-Петербург, 5 – 7 июня 2002 г.) - ГП ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, С.-Петербург, 2002.
7. Захаров И. П., Кукуш В. Д. Теория неопределенностей в измерениях. Учеб. пособие: - Харьков, Консум, 2002.
8. ISO/IEC 17025: 1999 General requirements for the competence of testing and calibration laboratories. ISO, Geneva, 1999.
9. ИСО 3534 – 1: 1993, Statistics – Vocabulary and symbols – Part 1: Probability and general statistical terms, ISO, Geneva, 1993.
10. Guide to the Expression of Uncertainty in measurement: First edition. ISO, Geneva, 1993.
11. International vocabulary of basic and general terms in metrology. ISO, Geneva, 1993.
12. EURACHEM, Quantifying Uncertainty in Analytical Measurement. Laboratory of the Government Chemist, London, 1995.
13. EA-4/02 Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration: EA, 1999. (www.european-accreditation.org)
14. DKD-3 Angabe der Meßunsicherheit bei Kalibrierungen: Phisikalisch-Technischen Bundesanstalt, Braunschweig, 1998.
15. DKD-3 Angabe der Meßunsicherheit bei Kalibrierungen. Beispiele: Phisikalisch-Technischen Bundesanstalt, Braunschweig, 1998.
16. Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results, NIST Technical Note 1297, 1994 Edition.
17. Meßunsicherheiten: Theorie und Praxis/ Franz Adunka. – 2. Aufl. Essen: Vulkan – Verl., 2000.

Содержание

Предисловие.....	3
1. Область применения.....	6
2. Термины и определения.....	7
3. Общие положения.....	8
4. Описание измерения и составление его модели	9
5. Оценивание значений и стандартных неопределенностей входных величин.....	11
6. Анализ корреляций	18
7. Бюджет неопределенности	19
8. Расчет оценки выходной величины.....	20
9. Расчет стандартной неопределенности выходной величины.....	21
10. Расчет расширенной неопределенности	24
11. Представление конечного результата измерений.....	26
12. Заключительные положения.....	29
Приложение 1. Источники неопределенностей в измерениях.....	31
Приложение 2. Отчет о неопределенности.....	32
Приложение 3. Расчет коэффициентов охвата из эффективных степеней свободы.....	34
Приложение 4. Функции распределения вероятностей.....	36
Приложение 5. Алгоритм поэтапного расчета неопределенности	38
Приложение 6. Комментарии по оценке наилучших измерительных возможностей.....	39
Приложение 7. Основные термины из области вероятности и математической статистики.....	42
Приложение 8. Примеры по оцениванию неопределенности.....	46
Литература.....	49